

计算力学与计算几何学交叉融合的历史与展望

在工业中计算机辅助几何设计（CAD）给出的标准几何模型一般是基于非均匀有理 B 样条（NURBS）的边界表示（B-Rep）模型。而工业中结构分析所采用的主要是有限元方法，有限元方法一般采用线性或二次的没有重叠的单元来表示几何模型。因此，从设计到分析的整个工作流程中，网格划分这一几何转换过程成为一个不可缺少的环节。网格划分及分析一般在计算机辅助工程（CAE）系统中完成。尽管对于很多固体力学分析这一几何转换过程并不难，然而对于复杂几何模型来说这一转换过程的计算量很大、很难完全实现自动化、容易出现有问题的网格，常常需要用户手工改进网格。据统计，工程设计中 80% 以上的时间被投入到这一几何转换过程，真正用于计算的时间所占比例非常小。对于高效率的虚拟产品开发来说，这一几何转换过程已成为一个苛刻的瓶颈（图 1）。因此工业中无论以设计为导向还是以分析为导向的群体，都迫切需要二者之间几何模型的无缝衔接。这一无缝衔接本质上是计算力学与计算几何学的交叉与融合。

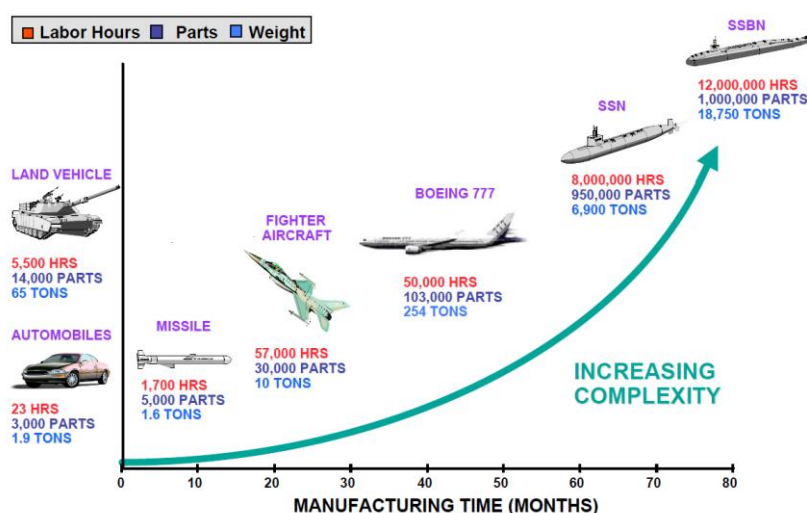


图 1 工业设计越来越复杂，使得分析时间和成本激增。

计算力学与计算几何学第一次交叉融合出现在上世纪六十年代等参单元的提出，如今计算力学软件主要采用的就是等参单元。在上世纪 80 年代随着非均匀有理 B 样条（NURBS）的提出，计算机辅助几何设计迅猛发展，逐渐成为一门独立的学科。从此设计与分析的发展逐渐独立，有限元网格生成这一新的研究方向随之诞生。设计与分析无缝融合重要性的讨论在二者走向独立之初就开始了，然而对工程实践的影响一直很小。如今计算机辅助设计与分析之间的几何模型转换已成为先进制造领域亟需解决的核心问题之一，而先进制造产业的发展水平是国家核心竞争力的重要标志，因此 2005 年等几何分析的概念被提出再次掀起研究热潮，短短 10 年多就有许多成果发表。等几何分析的概念来自等参单元的概念，这预示着计算力学与计算几何学的第二次深度交叉与融合。

现代工业不断向更高、更快、更精等方向发展，伴随出现的计算固体力学问题呈现高精度、自适应、高效率、强非线性、多尺度等现象，基于常规的低阶有限元处理该类问题时遇到困难，必须采用高阶单元，高阶网格生成对计算力学与

计算几何学的融合提出了新的要求。我们的研究工作将计算力学与计算几何学的基本理论有机结合，提出非均匀有理拉格朗日函数（NURL），实现了计算几何学与计算力学基函数的统一。在该工作及前期高阶单元方面工作的基础上得到面上项目和横向项目的支持展开计算机辅助设计与分析无缝融合软件开发（图2）。我们的程序在建模的过程中就充分考虑和保留了网格生成需要的信息，包括生成高阶网格需要的信息，从而可以实现设计和分析的深度融合。

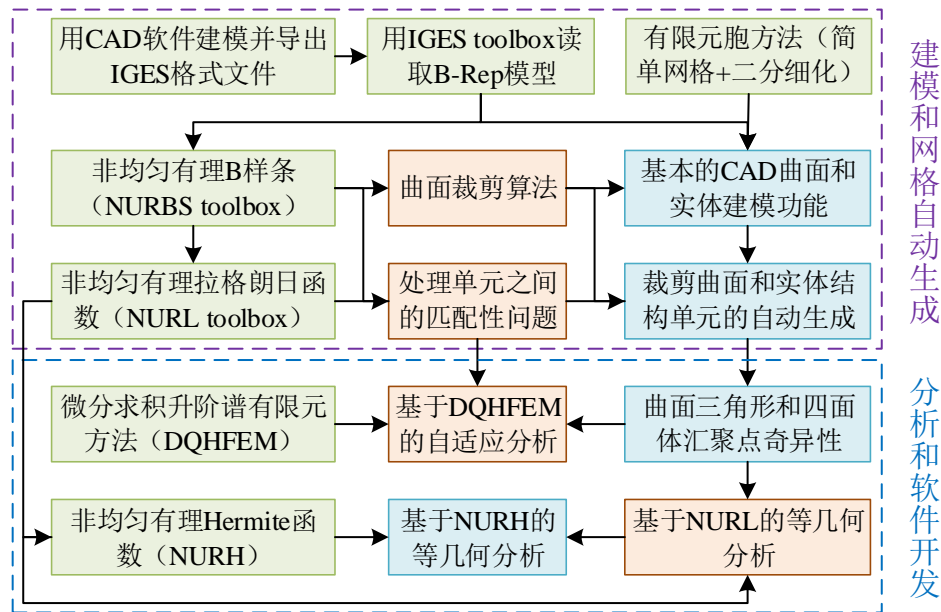


图2 计算机辅助设计与分析无缝融合软件开发流程图

在自然科学基金的支持下，我们把解析方法与数值方法相结合，提出微分求积升阶谱有限元方法，解决了自从有限元方法被提出起就困惑着计算力学界的高阶单元的数值稳定性和计算效率问题，在此基础上与等几何分析结合解决了高阶网格生成问题。微分求积升阶谱有限元方法只需划分一次网格，因此可以极大地简化前处理这一长期以来制约有限元应用的瓶颈问题。微分求积升阶谱有限元方法与计算机辅助设计与分析无缝融合技术结合，可以实现高精度、自适应、高效率、强非线性、多尺度等问题的分析。其高精度（图3）、自适应特性分别在空间望远镜姿态控制模拟（要求8位以上有效数字的精度）和3D打印等模拟（需要自适应）等前沿热点问题中具有显著优势。微分求积升阶谱有限元方法对网格奇异不敏感（图4）、只需很少的自由度就可得到很高的精度（图5），因此在多尺度（存在奇异）、强非线性模拟（需要大量迭代计算）中有重要意义。

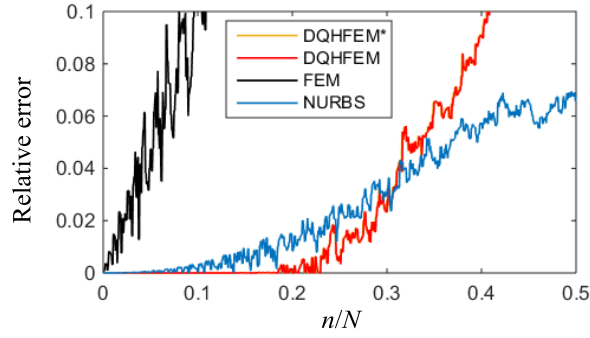


图 3 采用微分求积升阶谱有限元方法(DQHFEM)、等几何分析(NURBS)和常规有限元方法(FEM)求得简支板的离散频谱相对误差对比

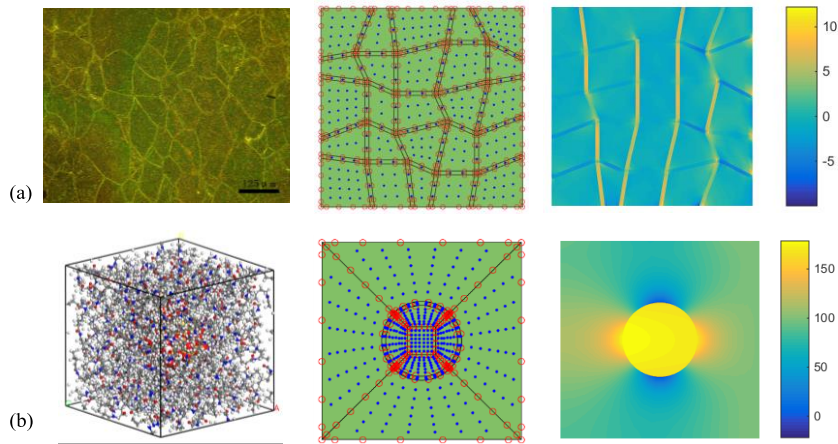


图 4 采用微分求积升阶谱有限元方法模拟 TC18 钛合金晶粒结构(a)及纳米颗粒增强复合材料(b)。界面尺度与基体和颗粒有量级差异仍然能够得到正确结果。

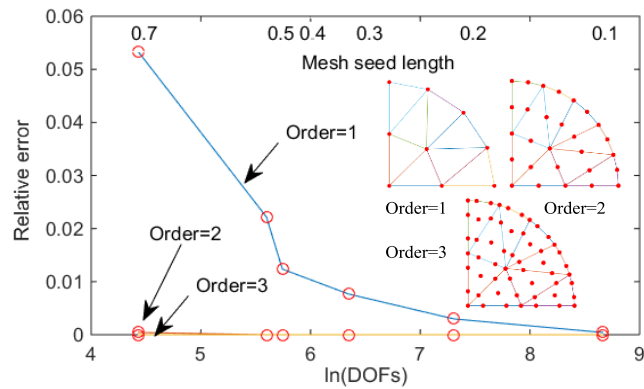


图 5 线性单元采用 $5000(e^{8.6})$ 多自由度的精度都不及二次、三次单元采用不到 $100(e^{4.5})$ 自由度的精度。我们的高阶单元的自由少几个量级，精度高几个量级。

刘波，航空科学与工程学院，副教授，卓越百人，E-mail:liubo68@buaa.edu.cn

参考文献

[1]Bo Liu*, Y.F. Xing, Z.K. Wang, X.F. Lu, H. Sun, Non-uniform rational Lagrange functions and its applications to isogeometric analysis of in-plane and flexural vibration of thin plates, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2017.4.19, 321: 173~208.

[2]C.Y. Liu, Bo Liu*, L. Zhao, Y.F. Xing, C.L. Ma, H.X. Li, A differential quadrature hierarchical finite element method and its applications to vibration and bending of Mindlin plates with curvilinear domains, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2017.01.01, 109(2): 174~197.